Mais à quoi #&*! servent les mathématiques?

Exemples précis de la vie courante.

Mario Veruete

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck

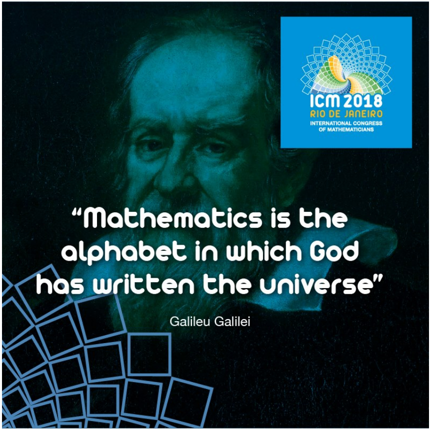
11 décembre 2017

Questions préliminaires

Aux quelles on va tenter d'y répondre :)

1. Mathématiques ? Qu'est-ce-que c'est ? Pourquoi ? Comment ?
2. Mathématicien ? Qui, quoi, comment ?

E pur si muove !



Lors d'un autre C.I.M. à Jérusalem

Les autres sciences cherchent les lois que D.ieu a choisi, les mathématiques cherchent les lois que D.ieu a dû obéir.

Jean Pierre Serre

Un mathématicien...

Quelque soit l'endroit où il se trouve, il résout des problèmes.

La rôle du mathématicien (B. Beauzamy)

Le mathématicien est là pour tenter d'établir des lois à partir de données. Ces données sont recueillies par des expérimentateurs : physiciens, chimistes, ingénieurs, etc. En déduire ensuite des lois, comme les lois de Maxwell, de Navier-Stokes, etc., c'est un travail de mathématicien.

Les mathématiques sont la plus ancienne des disciplines intellectuelles. Lorsqu'il est sollicité par la "société civile", le mathématicien a un devoir de critique et de vigilance à l'égard des constructions qui lui sont soumises :

Le mathématicien ne sait rien sur rien ; ses connaissances, faibles en physique et chimie, sont infimes en sciences du vivant et de la Terre. Il contemple sans a priori et sans passion les sujets de société qu'on lui soumet et sur lesquels il voit avec surprise s'exalter les foules et les médias.

Forgé par six mille ans de rude discipline intellectuelle, il juge la validité des raisonnements et la pertinence des conclusions. Son royaume est celui de la logique. Il sait – *cela fait des millénaires qu'il s'y essaie* – que les secrets de la Nature ne se laissent pas aisément percer ; on ne sait pas résoudre les problèmes et on ne sait même pas les poser.

Lorsque des blancs-becs pensent, en quelques années, avoir découvert quelque loi, avec deux douzaines de mesures, il sourit.

Insensible aux pressions, aux modes, aux accommodements, il voit avec étonnement, et même avec scepticisme, "les experts s'accorder" sur un sujet quelconque. Si un raisonnement est correct, il s'impose à tous. Si les experts s'accordent, c'est que quelque chose pose problème.

Exemples concrets

Maths pour la prise des décisions

Les professeurs d'université s'engagent parfois dans des entreprises pour gagner un peu d'argent supplémentaire. Le professeur Severus et sa famille gèrent une entreprise qui produit et vend des produits laitiers à partir du lait des vaches familiales. Ensemble, les trois vaches produisent 22 litres de lait chaque semaine, et Severus et sa famille transforment le lait en crème glacée et en beurre qu'ils vendent ensuite au marché fermier chaque samedi matin.

Le processus de fabrication du beurre nécessite 2 litres de lait pour produire un kilogramme de beurre, et 3 litres de lait est nécessaire pour faire un litre de crème glacée. Le professeur Severus possède un énorme réfrigérateur qui peut stocker des quantités pratiquement illimitées de beurre, mais son congélateur peut contenir au plus 6 litres de crème glacée.

La famille de Severus a au total 6 heures par semaine au total à consacrer à la fabrication des produits. Une heure de travail est nécessaire pour produire 4 litres de crème glacée ou un kilogramme de beurre. Toute fraction d'une heure est nécessaire pour produire la fraction correspondante du produit.
Les produits du professeur Severus ont une grande réputation, et il vend toujours tout ce qu'il produit. Il fixe les prix pour assurer un bénéfice de 5 euros par litre de crème glacée et de 4 euros par kilogramme de beurre. Il aimerait savoir combien de crème glacée et de beurre il devrait produire pour maximiser ses profits.

La première étape de la formulation de ce problème consiste à identifier les deux variables, qui sont les quantités que nous sommes capables de faire varier. Ce sont le nombre de litres de crème glacée, que nous notons x, et le nombre de kilogrammes de beurre que nous désignons par y. Ensuite, nous déterminons comment la fonction objectif dépend de ces variables. Nous notons la fonction objectif (qui dans ce cas est le profit) par z, et notons qu'il s'agit simplement de $z = 5x + 4y$ euros dans cet exemple.

Puisque nous visons à maximiser la production, il est généralement dans notre intérêt de choisir x et y aussi grand que possible. Cependant, les contraintes de production mentionnées ci-dessus nous empêchent de rendre ces variables trop importantes. Nous formulons maintenant les différentes contraintes de la description ci-dessus algébriquement.

- La contrainte de 6 litres sur la capacité du congélateur nous oblige à imposer la contrainte $x \leq 6$.
- La quantité totale de travail nécessaire pour produire x litres de crème glacée et y kilogrammes de beurre est $0,25x + y$. Puisque la famille peut travailler au total pendant au plus 6 heures pendant la semaine, nous avons la contrainte $0,25x + y \leq 6$.
- Nous cherchons à établir une formule pour la quantité de lait nécessaire au processus de production. Le nombre total de litres de lait utilisés est $3x + 2y$, et puisqu'il y a 22 litres de lait disponible, nous avons la contrainte $3x + 2y \leq 22$.
- Enfin, le problème doit inclure les contraintes simples $x \geq 0$, $y \geq 0$, car ça n'a pas de sens de produire des quantités négatives de crème glacée ou de beurre.

Chaque contrainte est représentée par une ligne, le côté hachuré de la ligne représentant la région du plan (x, y) qui ne parvient pas à satisfaire la contrainte.
Par exemple, la contrainte $3x + 2y \leq 22$ est représentée par la ligne $3x + 2y = 22$ (obtenue en remplaçant l'inégalité par une égalité), avec le côté "supérieur" de la ligne ombrée. En général, nous pouvons déterminer quel côté de la ligne satisfait la contrainte et lequel ne choisit pas un point qui ne se trouve pas sur la ligne et détermine si la contrainte est satisfaite à ce point. Si oui, alors tous les points de ce côté de la ligne sont réalisables ; sinon, tous les points de ce côté de la ligne sont irréalisables. L'ensemble des points satisfaisant aux cinq contraintes est connu sous le nom de région réalisable. Dans ce problème, la région réalisable est la région polygonale à cinq côtés au milieu de la figure.

Le problème de programmation linéaire est de trouver un point dans cette région possible maximise l'objectif $z = 5x + 4y$. Comme un pas vers cet objectif, nous complotons dans la figure 1.1 une ligne pointillée représentant l'ensemble des points où z = 20. Cette ligne indique des points tels que $(x, y) = (0, 5)$ et $(x, y) = (2, 2, 5)$ qui génèrent un bénéfice de 20 euros. De même, nous traçons la ligne $z = 5x + 4y = 30$ - l'ensemble des points qui réalise un bénéfice de 30 euros.

Google, Facebook, Shazam et les MP3

Un de mes préférés : Shazam

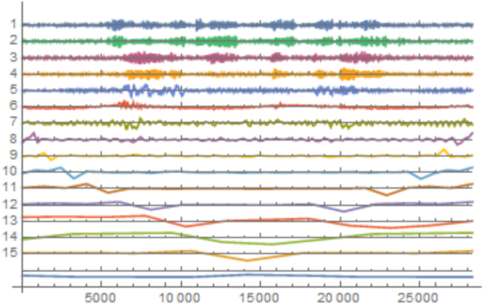
Problème : A partir d'un petit morceau de musique (n'importe où dans la chanson), possiblement bruité, trouver la chanson correspondante (parmi des milliers !), relativement vite.

Un de mes préférés : Shazam

Problème : A partir d'un petit morceau de musique (n'importe où dans la chanson), possiblement bruité, trouver la chanson correspondante (parmi des milliers !), relativement vite.

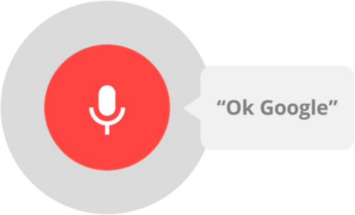
Comment c'est possible ?

Filtrage, minimisation, graphes

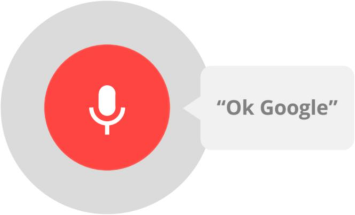


Ondelettes : Yves Meyer 2017. BadSound.mp3

Siri, on mange quoi ce soir ?



Siri, on mange quoi ce soir ?



Phonèmes et probabilités.

Google et son page-ranking

Domaine : Algèbre linéaire, optimisation combinatoire, graphes, probabilités.

Google et le page ranking

Problème : Parmi les 10^{12} pages web existantes, Google nous renvoie 10^7 pages en seulement $0,14$ secondes.

Google et le page ranking

Problème : Parmi les 10^{12} pages web existantes, Google nous renvoie 10^7 pages en seulement $0,14$ secondes.

Comment ça marche ?

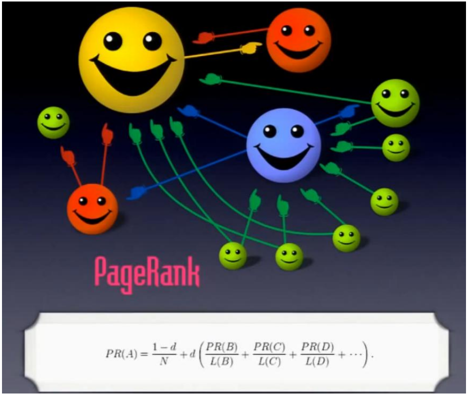
Google et le page ranking

Problème : Parmi les 10^{12} pages web existantes, Google nous renvoie 10^7 pages en seulement $0,14$ secondes.

Comment ça marche ?

PageRanking

Page ranking ?



Systèmes linéaires, recherche opérationelle et bien plus !

Basique, mais une des choses les plus importantes en sciences et mathématiques. Dire pourquoi.

$$\begin{cases} 3p + 2c = 5,10 \\ 5p + 3c = 8,10 \end{cases}$$

Les mathématiques du mieux faire

Quelle est la meilleure manière de ...

1. Envoyer une sonde sur mars ?
2. Éviter qu'un bâtiment s'écroule lors d'un séisme.
3. Freiner une voiture ?
4. Arriver sur Paris en consommant le moins d'essence ?
5. En temps minimum ?

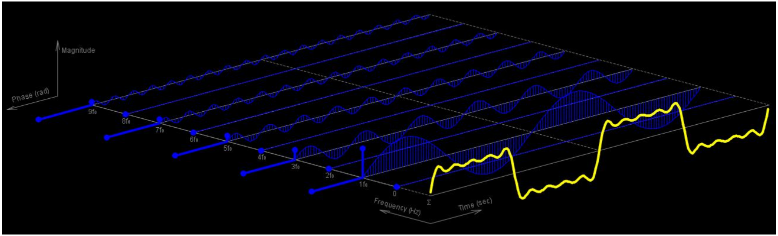
Facebook : big brother is wathching you !

Domaine des mathématiques : Big data, optimisation combinatoire, théorie des graphes, analyse harmonique, statistiques.

MP3, MP4 y JPG
ou comment stocker beaucoup en peu de place.

Ipods et l'analyse de Fourier

Vecteurs, produit scalaire et la transformée de Fourier

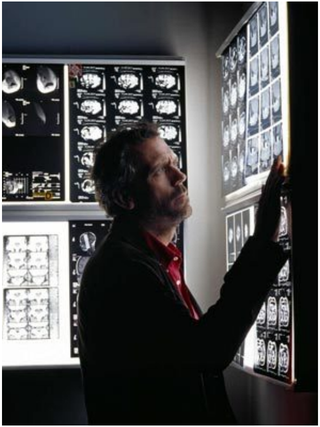


$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{2i\pi\xi t}\, dt$$

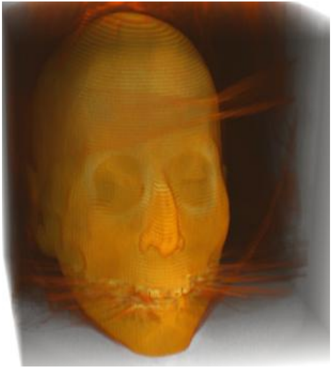
$$\int_{\mathbb{R}} u(t) \sin(2\pi kt)\, dt = \langle u, e_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

Transformée de Radon : Imagerie médicale et séismes

Domaine des maths : Problèmes inverses, analyse fonctionnelle, EDP

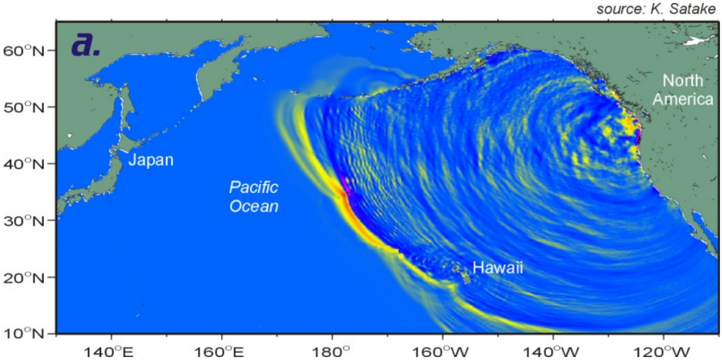


Imagerie médicale



Ça a bien évolué avec les années !

Tsunamis ou Shallow Waters Waves



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x}$$

Mais encore ?

- Déterminer le temps nécessaire pour le déferlement de la première vague.
- Simuler l'impact potentiel d'un événement de ce type. Valparaiso, Fukushima, Indonesie...

Comment déterminer l'epicentre d'un séisme ?

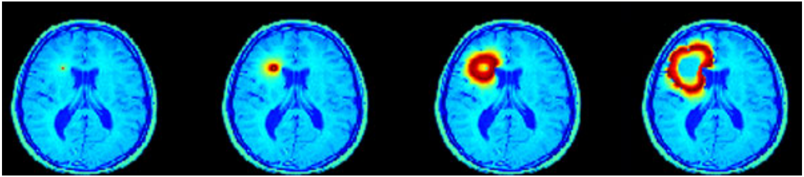
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nabla(a(x) \cdot \nabla u)$$

Biologie, médecine et mathématiques

Cancer et VIH

- Comment prédire la croissance tumorale ?

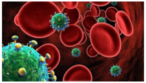
$$\begin{cases} \partial_t P = \mu P - \alpha HP + \beta(1-H)I - \gamma FP \\ \partial_t I = \delta_t \nabla \cdot (D\nabla I) - \eta \nabla \cdot (I \nabla B) + \alpha HP - \beta(1-H)I - \gamma FI \\ \partial_t B = -\gamma FB \\ \partial_t N = \gamma F(B + I + P) \end{cases}$$



Domaine des maths : EDP, systèmes dynamiques, analyse numérique, processus stochastiques

VIH : Quel est le meilleur moment pour commencer un traitement ARV ?

$$\begin{cases} \partial^\alpha T = S - \mu_1 T + rT\left(1 - \frac{T+I}{T_{max}}\right) - k_1 VT \\ \partial^\alpha I = k_1' VT - \mu_1 \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \\ \partial^\alpha V = N\mu_b I - k_1 VT - \mu_v V \end{cases}$$



T densité de CD4 sains.
V charge virale dans le sang.
I densité de CD4 infectés.

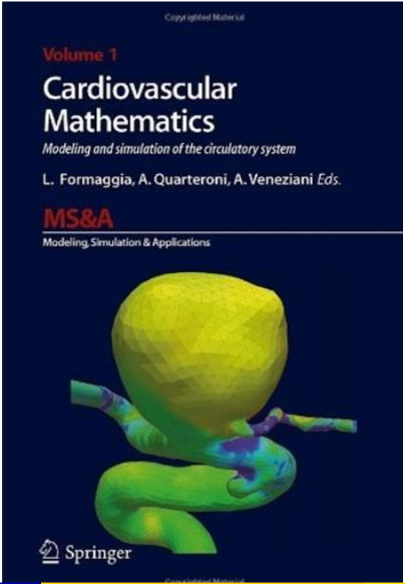
Mathématiques cardiovasculaires.

Domaine des mathématiques EDPs hyperboliques, dispersives. Problèmes à frontière libre, analyse numérique.

Au début c'est Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = \nu \Delta u - \nabla p \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

Cardiovascular Mathematics, L. Formaggia, A. Quarteroni, A. Veneziani.



Invasions biologiques et contrôle d'épidémies

Domaine des maths : Contrôle optimale, edp, statistiques spatiales.

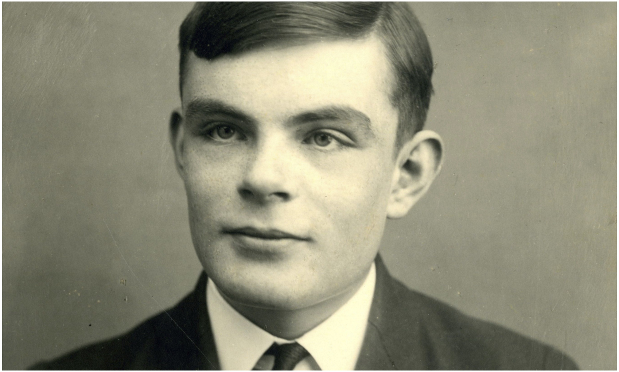
Pas d'intrus : **cryptographie**

Bob veut envoyer un message (d'amour ?) à **Alice**, il ne veut pas qu'il soit intercepté par un intrus (une autre fille ? :O). Comment faire ?

$\boxed{\text{I love you}} \rightarrow$ $\boxed{\text{אַן אָהֶבֶֿת אָתגַ}}$

Domaine des maths : Théorie des nombres, algèbre

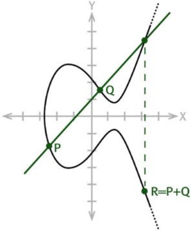
Alan Turing : le mathématicien qui vaincu les nazis



Père de l'informatique (avec Von Neumann), a réussi à déchiffrer ENIGMA.

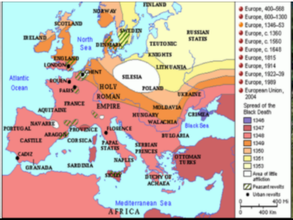

"BENEDICT CUMBERBATCH IS OUTSTANDING"
RADIO TIMES
"THE BEST BRITISH FILM OF THE YEAR"
★★★★★
THE INDEPENDENT
"AN INSTANT CLASSIC"
★★★★★
GLAMOUR
BENEDICT
KEIRA

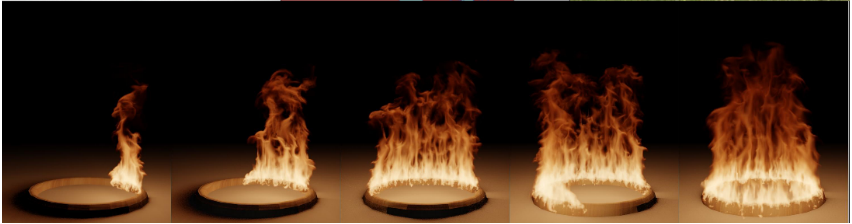
Le bitcoin et les courbes elliptiques



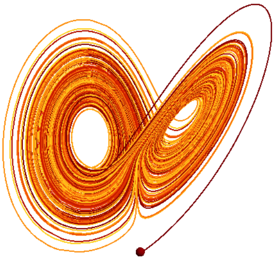
Fonctions de Haming y courbes elliptiques. Dernier théorème de Fermat et Andrew Wiles.

Équations de réaction-diffusion

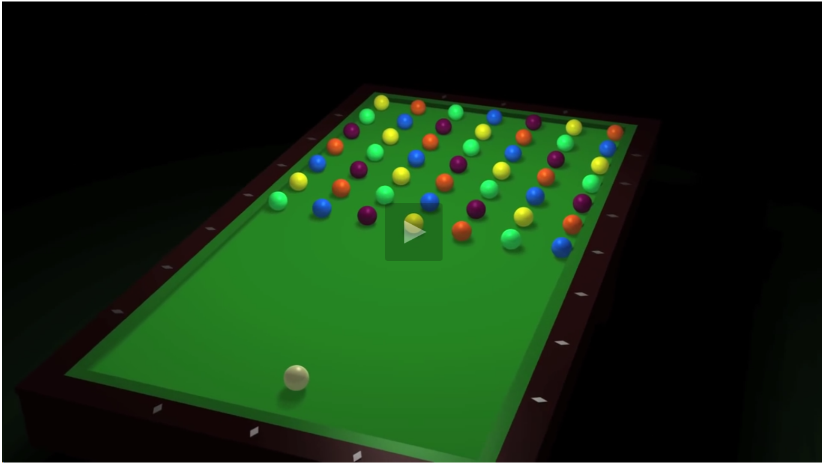


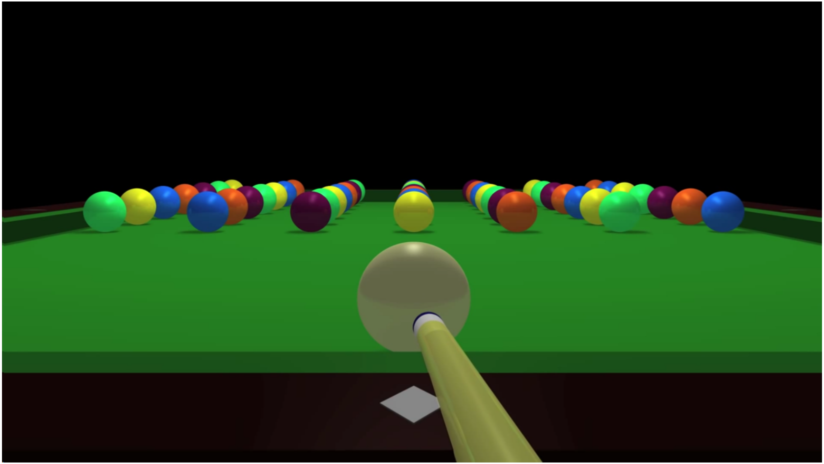


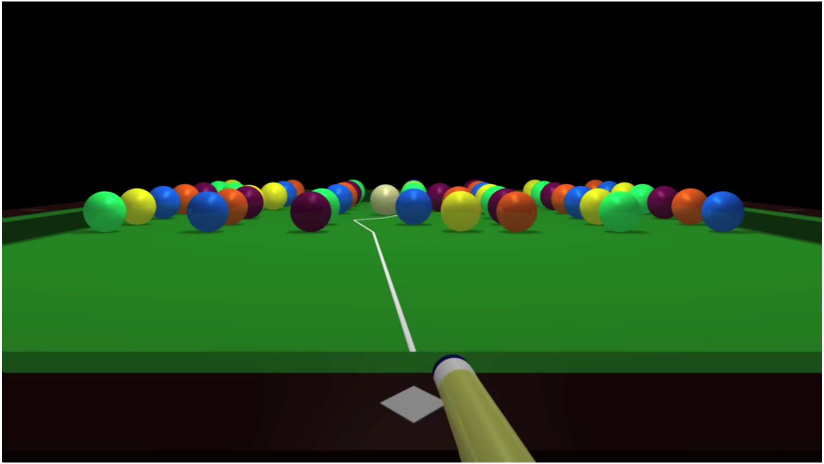
Effet papillon, billards, fractales

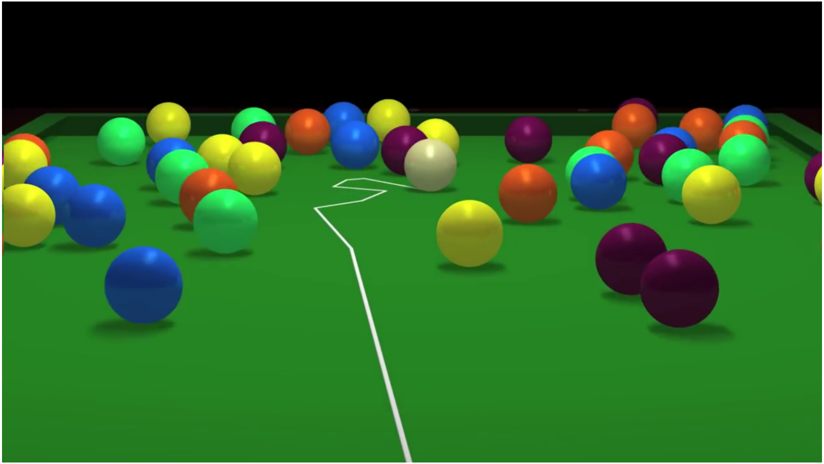


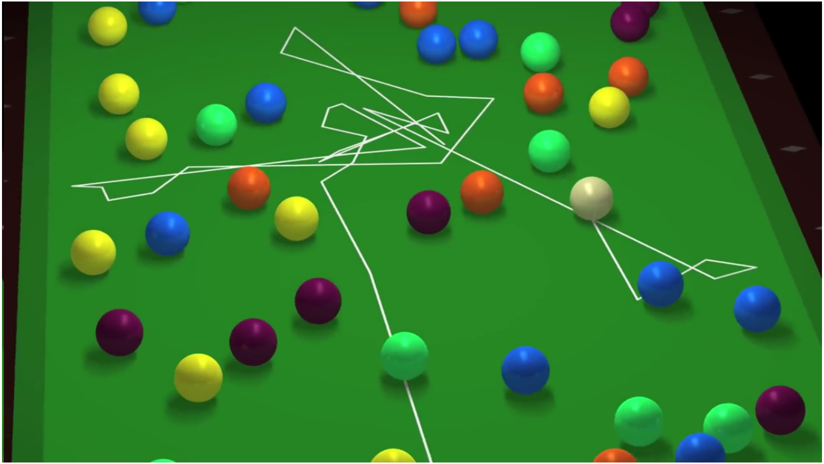
Théorie ergodique et billards



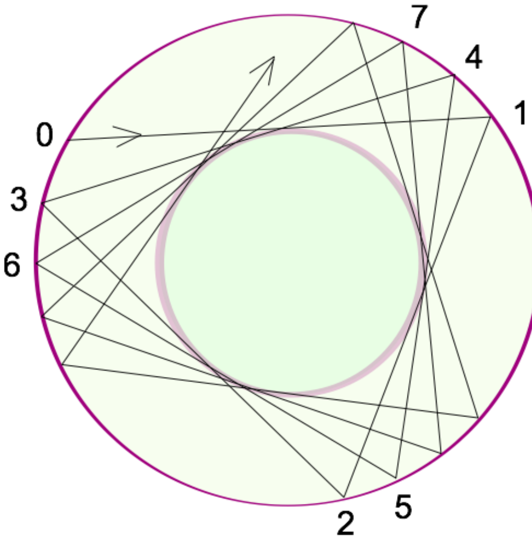








Changeons la géométrie



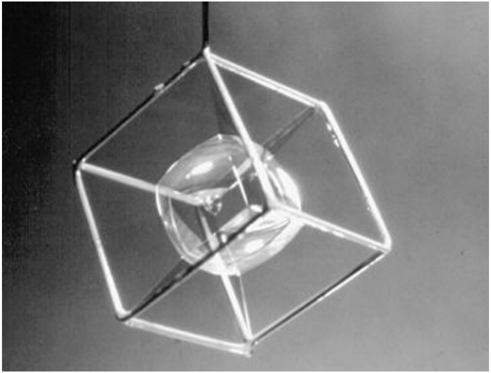
Poincaré et la stabilité du système solaire

Fractales : antennes et pétrole

Triangles, GPS et relativité générale

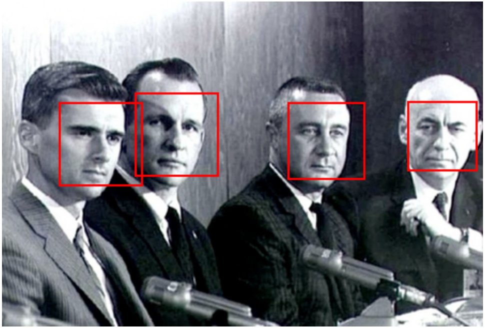
Géodésiques et bulles de savon : Analyse variationnelle

La Nature fait toujours en sorte de minimiser l'effort !



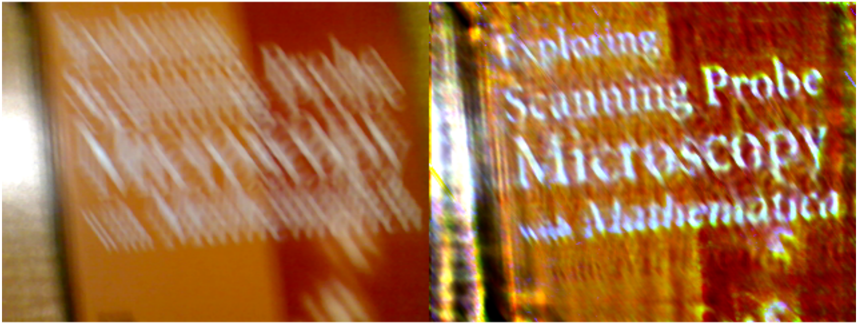
Encore du traitement des signaux

Détection d'objets



Encore un peu

Filtrage et restauration d'images.



De-convolution $u \star \phi(t) = \int_{\Omega} u(t)\phi(t-x)\,dx$

toujours du traitement d'images

Images panoramiques ou comment recoller des morceaux.

Des maths pour regarder l'univers